Rozšíření Matematiky A1 – 1. domácí test z LA

I. Počítání s vektory a maticemi:

1. a) Najděte vektor $\vec{v} = 3\vec{u}_1 - \vec{u}_2 + 2\vec{u}_3$, je-li $\vec{u}_1 = (-1, \ 2, \ 1)$, $\vec{u}_2 = (2, \ 0, \ -1)$, $\vec{u}_3 = (3, \ 1, \ 1)$.
   b) Spočítejte $\vec{v} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})$, je-li $\vec{u} = (3, \ 2, \ 2)$, $\vec{v} = (2, \ 1, \ -1)$.

2. Vypočítejte :

   a) $3\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

3. Najděte hodnost matice A a ověřte, že hodnost matice se rovná hodnosti matice transponované, když:

   a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$; b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 4 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$; c) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Je dána matice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Ukažte, že matice A je matice regulární

   a Gauss-Jordanovou metodou určete matici inverzní k matici A .

II. Řešení soustav lineárních rovnic:

1. Najděte všechna řešení (nebo ukažte, že soustava řešení nemá) - užijte Gaussovu eliminační metodu:

   a) $\begin{aligned} 2x - y + z + v &= -3 \\ x + y + 3z - v &= 0 \\ -x + 2y - z + v &= 6 \\ x + y + 2z - 3v &= -2 \end{aligned}$; b) $\begin{aligned} 2x - y + z + v &= 1 \\ y - z &= 0 \\ x + y + 2z + v &= 3 \\ x - 2y - z &= 1 \end{aligned}$.

2. a) Ukažte, že matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ má hodnost 3.

   b) Co můžete říci na základě výsledku z a) o množině řešení soustavy rovnic (*) $A \cdot \vec{x}^T = \vec{o}^T$?
   c) Soustavu (*) vyřešte .

3. Jsou dány matice $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ a $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(i) Vypočítejte součin $A \,.\, B$.

(ii) Ukažte, že k matici A existuje matice inverzní a určete ji. Dá se použít (i) ?

(iii) Užitím A^{-1} řešte rovnici $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ a proveďte zkoušku správnosti řešení.

III. Determinanty a jejich užití.

1. Vypočítejte determinanty :

$$\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} ; \quad \begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 5 & -3 & -2 \\ 1 & 4 & -3 \end{vmatrix} ; \quad \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} ; \quad \begin{vmatrix} a & 2a & -a & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b & b & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} .$$

2. Buďte dány matice $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ a $N = \begin{pmatrix} a & a & -2a \\ -1 & 0 & 2 \\ b & b & -3b \end{pmatrix}$.

Ověřte, že platí: $\det M \,.\, \det N = \det(M \cdot N)$.

3. Užitím determinantů určete matici inverzní k matici $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Pomocí determinantu najděte rovnici roviny, ve které leží body $A[1,-1,2]$, $B[2,1,0]$ $C[-1,1,1]$.

.

.